Determinarea, prin metóde algebrice, a momentuluĭ de inerţie a figurilor geometrice plane cele mai usitate în aplicaţiuni.

Determinarea momentuluĭ de inerţie prin calculul integral se face cu cea maĭ mare înlesnire, căcĭ metoda întrebuinţată este o methodă generală; asemenĭ şi prin methodele grafice. Sunt însă casurĭ, când cine-va n'a avut nicĭ timpul, nicĭ ocasiunea, de esemplu, pentru a studia methódele de maĭ sus; şi cu tóte astea ar dori ca în loc de a intrebuinţa, în mod mecanic, formulele stabilite pentru momentul de inerţie al fie-căreĭ figurĭ să'şĭ dea compt de modul cum sunt stabilite şi în certe casurĭ să pótă verifica exactitatea lor.

Considerând că metódele algebrice sunt astădĭ fórte familiare maĭ tutulor carĭ s'aŭ ocupat puţin cu studii de matematicĭ, şi pentru a corespunde la nişte dorinţe de investigaţiunĭ mathematice, am incercat de a stabili, prin methóde algebrice, momentul de inerţie a câtor-va figuri geometrice cele maĭ usitate în practică.

Voiŭ începe prin a reaminti definiţia momentuluĭ de inerţie şi cate-va din theoremele relative la momentul de inerţie, necesare pentru căutările ulterióre.

Se numesce momentu de inerţie al unui corp suma produselor mr^2 adică Σmr^2; în care m însemnéză masa uneĭ molecule séŭ unuĭ punt din acel corp, şi r distanţa aceluĭ punt fie la un plan, fie la o dréptă (axă) fie la un punt. Urméză din acésta că sunt de considerat

trei feluri de momente de inerție, adică

1) în raport cu un plan
2) în raport cu o dréptă ; și
3) în raport cu un punt.

Dacă însemnăm :

prin p distanța unei molecule la un plan
» d » » » la o dréptă
» r » » » la un punt.

cele trei feluri de momente de inerție sunt:

$$\Sigma\, mp^2$$
$$\Sigma\, md^2$$
$$\Sigma\, mr^2.$$

Vom însemna pe cel d'ântâiŭ prin I_p.
pe cel d'al doilea prin I_d.
și pe cel d'al treilea prin I_o.

ast-fel că vom avea:

$$Ip = \Sigma m\, p^2$$
$$Id = \Sigma m\, d^2$$
$$Io = \Sigma m\, r^2$$

acest din urmă se mai numesce și momentul de inerție polar.

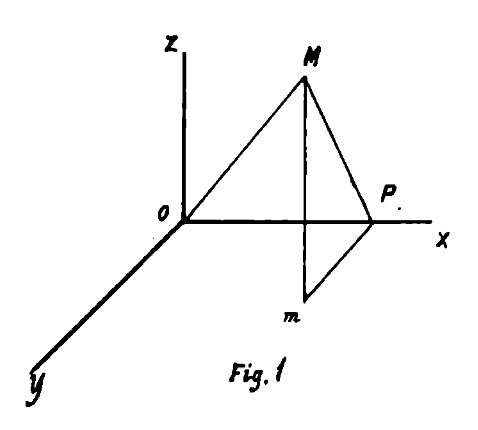


Fig. 1

Dacă considerăm trei axe rectangulare ox, oy, oz și un punct M dintr'un corp în spaciu; distanțele acestui punt sunt:

z=Mm la planul xoy
x=oP » » zoy
y=mP » » zox

Momentul de inerție al corpului în raport cu fie-care din

cele trei planurĭ va fi:

$\Sigma m z^2$ în raport cu planul x o y

$\Sigma m x^2$ » » z o y

$\Sigma m y^2$ » » z o x

Dacă acum luăm momentul de inerție al aceluiașĭ corp în raport cu o dréptă ($o x$ de exemplu) avem:

$$\Sigma m \overline{MP}^2 = \Sigma m (z^2 + y^2) \text{ căci } \overline{MP}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mP}^2$$

prin urmare:

$$\Sigma m \ MP^2 = \Sigma m \ z^2 + \Sigma m \ y^2 \text{ adică}$$

Theorema I. Momentul de inerție al unui corp în raport cu o dréptă óre-care (ox de exemplu) este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu două planurĭ ($x o y$ și $z o x$) rectangulare și conținând fie-care dreapta considerată.

Luând acum momentul de inerție în raport cu puntul o, vom avea:

$$\Sigma m \ O M^2 = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) \text{ căci}$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 \text{ și } \overline{MP}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mP}^2 \text{ deci}$$

$$\Sigma m \ \overline{OM}^2 = \Sigma m \ x^2 + \Sigma m \ y^2 + \Sigma m \ z^2 \text{ adică}$$

Theorema II. Momentul de inerție în raport cu un punt este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu cele trei fecie ale unui triedru trirectangul trecênd (feciele) prin punctul considerat; séu cu suma momentelor de inerție în raport cu două drepte rectangulare trecând prin acel punct.

Se considerăm un corp și un plan P trecênd prin centrul de gravitate al corpului: se căutăm momentul de inerție al corpului considerat in raport cu un plan óre-care Q paralel cu planul P. Fie L distanta între cele două planuri considerate; fie p distanța unui punt al corpului la planul P.

Momentul de inerție al corpului în raport cu planul Q va fi;

$I = \Sigma m\,(p+h)^2 = \Sigma m\,(p^2+h^2+2\,ph) = \Sigma m\,p^2 + \Sigma m h^2$ $+\Sigma m\ 2\ ph$: însă fiind că h este o cantitate constantă putem scrie:

$$I = \Sigma m\,(p+h)^2 = \Sigma m\ p^2 + h^2\ \Sigma m + 2\ h\ \Sigma m\ p$$

și find că $\Sigma m = M$ massa totale a corpului, și $\Sigma m\ p = o$ din causa că planul P trece prin centrul de gravitate al corpului, atunci avem:

$$I = \Sigma m\ p^2 + h^2\ M.$$ adică

Teorema III. — Momentul de inerție al unui corp în raport cu un plan óre-care este egal cu momentul de inerție în raport cu un plan paralel trecênd prin centrul de gravitate, plus produsul massei totale prin patratul distanței dintre cele două planuri.

Fie trei axe rectangulare trecênd prin centrul de gravitate G al unui corp Gz, Gx, Gy. (Figură identică cu cea de mai sus cu deosebire că o este înlocuit prin G.)

Dacă considerăm uă dréptă paralelă cu axa Gz; această dréptă va fi represintată prin ecuațiile

$$x_1 = h.$$
$$y_1 = l.$$

Să căutăm momentul de inerție al corpului in raport cu drépta considerată; acest moment de inerție va fi:

$$I = \Sigma\,m\Big((x-h)^2 + (y-l)^2\Big)$$
$$= \Sigma m\,(x^2 + h^2 - 2\,h\,x + y^2 + l^2 - 2l\,y)$$ séu
$$= \Sigma m\,x^2 + \Sigma m\,h^2 - \Sigma m\,2h\,x + \Sigma m\,y^2 + \Sigma m l^2 - \Sigma m.2ly$$

Din cauza că h și l sunt constante și din causa că originea axelor coincide cu centrul de gravitate vom avea:

$$\Sigma m\ h^2 = h^2 \Sigma m = M.\,h^2$$
$$\Sigma m\ l^2 = l^2 \Sigma m = M.\,l^2$$
$$\Sigma m.\,2\,hx = 2\,h\,\Sigma\,mx = o$$

$$\Sigma m.\,2\,ly = 2\,l\,\Sigma\,my = o$$

atunci formula de mai sus devine:

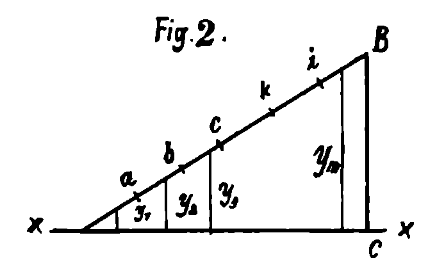
$$I = \Sigma m\,x^2 + \Sigma m\,y^2 + M\,(h^2 + l^2) \text{ adică}$$

Theorema IV Momentul de inerție în raport cu uă axe oare care este egal cu momentul de inerție în raport ca uă axă trecând prin centrul de gravitate și paralelă cu cea d'ântâi, plus produsul masei totale prin patratul distanței dintre cele două axe.

Theorema aceasta este pentru momentul de inerție îu raport cu două drepte paralele din care una trece prin centrul de gravitate identică cu theorema III relativă la momentul de inerție în raport cu duoĕ planuri paralele din care unul trece prin centrul de gravitate; cu alte cuvinte theorema IV este pentru o dréptă aceea ce theorema III este pentru un plan·

Acestea fiind stabilite pentru un corp óre-care, se scie prin ce considerații ajungem de la masa unui corp la volumul său, și de la un volum la o suprafacià precum și de la suprafacià la linii.

Se căutăm déră momentul de inerție al unei drepte în raport cu o axă óre-care.



Fie dréptă A. B. de lungime l al cărei moment de inerție în raport cu axa xx voim a afla.

Impărțim drépta A.B. în n părți egale; lungimea uneia din acestea părți va fi $\frac{l}{n}$

Fie α unghiul format de drépta AB cu axa xx; și y_1, y_2, y_3, . . . y_n distanțele de la centrul fie-cărui element Ba, ab, bc . . . ki, iB

al dreptei AB la axa xx. După definiția momentul de inerție va fi:

$$I=\frac{l}{n}y_1^{\,2}+\frac{l}{n}y_2^{\,2}+\frac{l}{n}y_3^{\,2}+\,.\,.+\frac{l}{n}y_{n-1}^{\,2}+\frac{l}{n}y_n^{\,2}\text{sau}$$

$$I=\frac{l}{n}\left(y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+y_3^{\,2}+\,.\,.\,.\,+y_{n-1}^{\,2}+y_n^{\,2}\right)$$

după figură avem:

$$y_1=\frac{l}{2n}\sin\alpha \text{ și prin urmare } y_1^{\,2}=\frac{l}{4n^2}\sin^2\alpha$$

$$y_2=\left(\frac{l}{n}+\frac{l}{2n}\right)\sin\alpha=\frac{3l}{2n}\sin\alpha \;\text{»}\;\text{»}\; y=\frac{l^2}{4n^2}\sin^2\alpha\times 3^2$$

$$y_3=\left(\frac{2l}{n}+\frac{l}{2n}\right)\sin\alpha=\frac{5l}{2n}\sin\alpha \;\text{»}\;\text{»}\; y_3=\frac{l^2}{4n^2}\sin^2\alpha\times 5^2$$

$$y_{n-1}=\left[\frac{(n-2)\,l}{n}+\frac{l}{2n}\right]\sin\alpha=\frac{(2n-3)l}{2\,n}\sin\alpha \text{ și prin urmare}$$

$$y_{n-1}=\frac{l^2}{4n^2}\sin^2\alpha\times(2n-3)^2$$

$$yn=\left[\frac{(n-1)\,l}{n}+\frac{l}{2n}\right]\sin\alpha=\frac{(2n-1)\,l}{2\,n}\sin\alpha \;\text{»}\;\text{»}$$

$$y_n=\frac{l^2}{4n^2}\sin^2\alpha+(2n-1)^2$$

prin urmare

$$I=\frac{l}{n}\frac{l^2}{4n^2}\sin^2\alpha\left[1^2+3^2+5^2+7^2...+(2n-3)^2+(2n-1)^2\right]$$

Suma din parantes nu este alt-ceva de cât suma patratelor celor d'ntâiu numere impare. Acéstă sumă se deduce fără dificultate că este egală cu $n\frac{(4n^2-1)}{3}$.

Inlocuind déră suma din parantes prin equivalentul său, vom avea:

$$I=\frac{l^3}{4n^3}\sin^2\alpha\frac{n(4n^2-1)}{3}=\frac{l^3\sin^2\alpha}{3}\left[\frac{4n^3-n}{4n^3}\right]=\frac{l^3\sin^2\alpha}{3}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

Dacă acum facem să créscă n tinzând către ∞, termenul $\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ tende către 1 căci $\frac{1}{4n^2}$ tende către 0 deci

$$I=\frac{l^3\sin^2\alpha}{3}$$

Dacă scriem formula acésta sub forma

$$I = l^2 \sin^2\alpha \frac{l}{3}$$

Vedem că după figură avem: $l \sin \alpha =$ Bc prin urmare Momentul de inerție al unei drepte în raport cu o axă ce întêlnesce drépta sub un unghiu óre-care este egal cu patratul perpendicularei lăssată din estremitatea dreptei pe axă, multiplicat prin $\frac{1}{3}$ din lungimea dreptei.

Dacă drépta întâlnesce axa sub un unghiu drept adecă este perpendiculară pe axă, atunci $\alpha = 90$, sin $\alpha = 1$ și momentul de inerție devine

$$I = \frac{l^3}{3} = l^2 . \frac{l}{3}$$

In acest cas perpendiculara lăsată din extremitatea dreptei pe axă este egelă cu l și prin urmare enunțiul de mai sus este general pentru uă dréptă.

(Va urma)

Flor Pomponiu.